ÅOP og andre renter

I dette tillæg skal vi se på nogle vigtige rentebegreber i finansverdenen og bankvæsenet. Begreberne har ikke altid været anvendt lige konsekvent og nogle betegnelser går på et tidspunkt af mode og bliver afløst af andre. Jeg skal forsøge at definere nogle af dem efter hvordan det overvejende ser ud i dag. Begrebet *nominel rente* udelades, da det benyttes meget tvetydigt.

Pålydende rente

Vi har den *pålydende rente* p.a., hvor sidstnævnte forkortelse står for *pro anno* og betyder pr. år. Begrebet er egentligt lidt fiktivt, for det tager *ikke* hensyn til, hvor mange rentetilskrivninger, der er pr. år, dvs. den tager ikke hensyn til det, vi kalder *renters rente*. Hvis der for eksempel tilskrives en rente på 1% hver måned, så vil man sige, at den pålydende rente er 12% p.a.

Debitorrenten

Denne rente tager hensyn til renters rente. Lad os se på eksemplet med en pålydende rente på 12% p.a. med rentetilskrivning hver måned. Da vil man for at få *debitorrenten* skulle dividere den pålydende rente med 12 og derefter foretage følgende beregning:

(1) $$r_{deb} \;=\; \left(1 \;+\; \frac{r_{pål}}{N}\right)^{n_t} - 1 \;=\; \left(1 \;+\; \frac{0{,}12}{12}\right)^{12} - 1 \;=\; 1{,}01^{12} - 1 \;=\; 0{,}1268$$

hvor N står for, hvor mange terminer, der er pr. år, her 12. $r_{pål}$ er den pålydende rente pr. år, og r_{deb} er debitorrenten. Debitorrenten bliver altså 12,68% og er mere retvisende end den pålydende rente på 12%, fordi den tager hensyn til renters rente. Tidligere blev denne rente også betegnet *den effektive rente*, men det er man efterhånden gået væk fra nu. Sidstnævnte bruges nu i en mere kompleks situation.

Effektiv rente

Den *effektive rente* betegner de samlede omkostninger ved et lån regnet i procent pr. år. Der tages hensyn til omkostninger, provisioner, eventuelle kurstab ligesom den afhænger af både den pålydende rente og hvor ofte der tilskrives renter. Minder meget om ÅOP, som vi senere omtaler. Sidstnævnte bruges dog især i forbindelse med privates lån.

Realrente

Realrenten r_{real} ved en investering er den pålydende rente $r_{pål}$ justeret for inflation:

(2) $$r_{real} \;=\; \frac{1+r_{pål}}{1+i} \;-\; 1 \qquad \text{(Fishers ligning)}$$

hvor i er inflationsraten.

ÅOP – Årlige Omkostninger i Procent

Begrebet ÅOP bruges primært i forbindelse med privates lån og er opstået i et forsøg på at gøre lånebetingelser mere gennemskuelige og sammenlignelige. Hovedtanken er, at ÅOP skal omfatte alle omkostninger ved lånet. Beregningen af ÅOP foregår gennem løsningen af følgende ligning med hensyn til X:

(3) $$\sum_{k=1}^{m} C_k(1+X)^{-t_k} = \sum_{l=1}^{m'} D_l(1+X)^{-s_l} \quad \text{(Grundligningen)}$$

Ligningen kan umiddelbart forekomme lidt skræmmende ved et første øjesyn, men der er en meget klar idé gemt i den. Kort fortalt udtrykker ligningen, at summen af alle de udnyttede kreditmuligheder, tilbageskrevet til nutidsværdi, er lig med summen af alle tilbagebetalinger eller betalinger af omkostninger, tilbageskrevet til nutidsværdi. Den værdi af X, som får ligningen til at passe, er lånets ÅOP.

En hovedidé er, at det ikke er ligegyldigt, *hvornår* man er i besiddelse af et pengebeløb. Normalt er det bedst at have pengene på et tidligt tidspunkt, fordi penge normalt forrentes med en positiv procent. For at kunne sammenligne beløb modtaget som lån på visse tidspunkter med ydelser og omkostninger indbetalt på andre tidspunkter, må man regne frem eller tilbage til et *fast* tidspunkt. Man vælger her at bruge starttidspunktet, som det tidspunkt, hvor man vurderer pengebeløbenes værdi i forhold til. Hvilket fast tidspunkt, man vælger, viser sig at være ligegyldigt!

En anden problematik er terminslængden. Det er klart, at ÅOP handler om en termin på 1 år. Det er selve pointen, at den procentvise rente skal være overskuelig, og renten på ét år forekommer nem at overskue for de fleste. Mindre terminslængder får blot lånet til at fremstå billigere for mange brugere. Det betyder også, at formlen (3) regnes i "enheder" af 1 år. I forhold til starttidspunktet $t_1 = 0$ skal tidspunkterne t_k og s_l med andre ord være i enheder af 1 år. En måned efter start vil således være 1/12, et halvt år 1/2, 1 år 1, tre år 3, etc. I den forbindelse er det vigtigt at fremhæve, at man jo har følgende oversættelse mellem *fremskrivningsfaktoren F* for henholdsvis 1 og n perioder:

(4) $$F_n = F_1^n \quad \Leftrightarrow \quad 1+r_n = (1+r_1)^n$$

Går man 1 periode frem i tid, *ganger* man altså beløbet med fremskrivningsfaktoren for 1 periode, hvilket er $1+r_1$. Går man derimod 1 periode tilbage i tid, *dividerer* man med fremskrivningsfaktoren for 1 periode, hvilket er det samme som at *gange* med $(1+r_1)^{-1}$. Går man i stedet n perioder frem i tid, så *ganger* man med fremskrivningsfaktoren for n perioder, hvilket er $1+r_n$ eller $(1+r_1)^n$. Går man derimod n perioder tilbage i tid, *dividerer* man med fremskrivningsfaktoren for n perioder, hvilket er det samme som at *gange* med $(1+r_n)^{-1}$ eller $(1+r_1)^{-n}$.

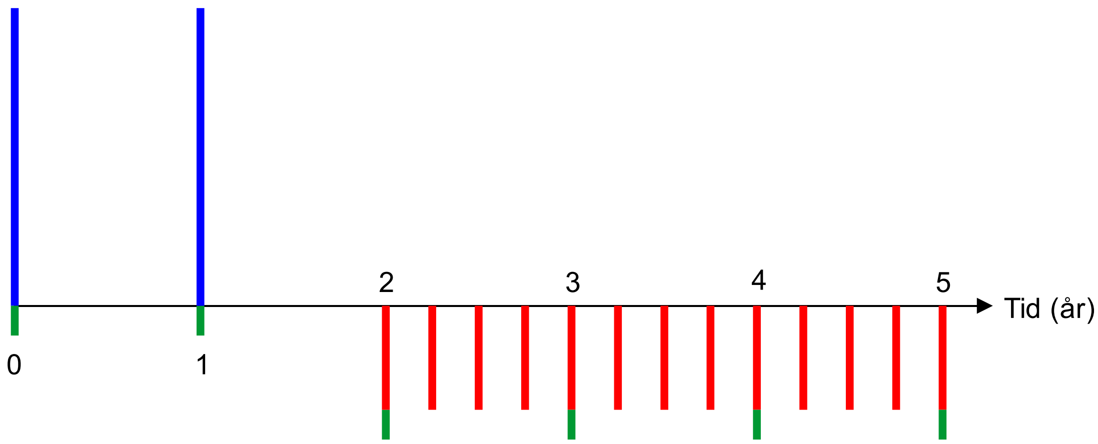
Specielt betyder det, at hvis 1 periode er én måned og 12 perioder ét år, så fås:

(5) $$F_{år} = F_{måned}^{12} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + r_{år} = (1 + r_{måned})^{12} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + r_{måned} = \left(1 + r_{år}\right)^{1/12}$$

Lad os se et konkret eksempel på, hvordan man bestemmer ÅOP. Det er nok ikke særligt realistisk, men det illustrerer, hvad der er i spil.

Eksempel 1

Åge Karl driver en privat lille lånevirksomhed. En kunde tilbydes følgende ordning: Et lån, hvor kunden straks får 10000 kr. på lommen og et år senere yderligere 10000 kr. Fra år 2 til år 5 foregår afbetalingen af lånet: Hvert kvartal betales 3500 kr. Oveni er der hvert år et administrationsgebyr på 1000 kr., startende i år 0. Situationen er beskrevet på figuren nedenfor. De to blå søjler over stregen repræsenterer det kunden modtager. De røde søjler repræsenterer de beløb, kunden skal betale i ydelse fra det 2. til det 5. år. De grønne søjler er administrationsgebyr, som kunden ligeledes skal betale. Hvor stor er ÅOP?



Løsning:

Vi skal indsætte i formel (3). På venstre side har vi de udnyttede kreditter, som er de to gange 10000 kr. Den første udbetaling er allerede ved start, dvs. $t = 0$, mens den anden udbetaling skal tilbageskrives med 1 år. I hele regnestykket regnes i "enheder" af år.

$$\begin{aligned}
&10000 \; + \; 10000 \cdot (1+X)^{-1} \\
&= 1000 \; + \; 1000 \cdot (1+X)^{-1} \\
&+ \; (3500+1000) \cdot (1+X)^{-2} \; + \; 3500 \cdot (1+X)^{-2,25} \; + \; 3500 \cdot (1+X)^{-2,5} \; + \; 3500 \cdot (1+X)^{-2,75} \\
&+ \; (3500+1000) \cdot (1+X)^{-3} \; + \; 3500 \cdot (1+X)^{-3,25} \; + \; 3500 \cdot (1+X)^{-3,5} \; + \; 3500 \cdot (1+X)^{-3,75} \\
&+ \; (3500+1000) \cdot (1+X)^{-4} \; + \; 3500 \cdot (1+X)^{-4,25} \; + \; 3500 \cdot (1+X)^{-4,5} \; + \; 3500 \cdot (1+X)^{-4,75} \\
&+ \; (3500+1000) \cdot (1+X)^{-5}
\end{aligned}$$

På højre side af lighedstegnet haves indbetalinger af ydelser og omkostninger. Alle tilbageskrives til $t = 0$. Bruger man et CAS-værktøj, vil man se, at løsningen X til ligningen er 0,4197. Altså en ÅOP på 42,0%. Ifølge en dansk lov fra 2019 må der ikke udbydes lån med en ÅOP på over 35%. Dermed er Åge Karls udlånsvirksomhed ulovlig. Loven siger endda, at hvis man benytter markedsføring af kviklån, må ÅOP højst være på 25%.

□

Vi skal nu se på et par velkendte specialtilfælde: *Renteformlen* og formlen til beregning af ydelser i *annuitetslån* (se fx [1]). Ikke overraskende er værdien for r heri den samme som ÅOP – hvis r er den årlige rente og n regnes i år, vel at mærke! Er det ikke tilfældet, kan man omregne renten r til en årlig rente $r_{år}$ ved hjælp af enten formel (4) eller formel (5), og derefter vil man få værdien for ÅOP.

Sætning 2 (Renteformlen)

Et lån af størrelsen K_0 optages, og n år senere tilbagebetales lånet med beløbet K. Da fås ÅOP som løsningen r til følgende ligning:

(6) $$K = K_0 \cdot (1+r)^n$$

Bevis: I stil med eksempel 1, kan situationen illustreres således:

Grundligningen (3) giver her: $K_0 = K \cdot (1+X)^{-n}$. Ganger vi på begge sider af lighedstegnet med $(1+X)^n$ fås: $K_0 \cdot (1+X)^n = K$, som egentlig bare er renteformlen, hvor r er udskiftet med X. Dermed er det ønskede bevist.

□

Sætning 3 (Annuitetslån)

Et lån af størrelsen G optages og tilbagebetales ved, at man efter hver af i alt n terminer betaler en fast ydelse y. Renten r pr. termin kan bestemmes som løsningen til ligningen

(7) $$y = G \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$$

Lad N være antallet af terminer pr. år. Da kan ÅOP bestemmes ved:

(8) $$ÅOP = r_{år} = (1+r)^N - 1$$

Bevis: Vi skal ikke gå i detaljer med et bevis her, da det fylder lidt meget. Idéen er først at bevise (7) ved at tilbageskrive alle ydelserne til starttidspunktet, lægge resultaterne sammen og sætte lig med G. Dernæst omskrives ligningen snedigt til den mere kompakte formel (7). Sammenhængen mellem renten r pr. termin og den årlige rente $r_{år}$ er ifølge (4) i dette tilfælde: $1+r_{år}=(1+r)^N \;\Leftrightarrow\; r_{år}=(1+r)^N-1$.

Vi har samtidigt, at $1+r=(1+r_{år})^{1/12}$. Det sidste skal bruges for at indse, at den ligning, vi fik opstillet oprindelig ved at tilbageskrive svarer til den ligning, som Grundligningen (3) giver os.

□

Eksempel 4 (Annuitetslån)

Familien Andersen optager et annuitetslån på 25000 kr. Lånet afbetales ved efter hver måned at indbetale en ydelse på 1200 kr. Efter 24 måneder er lånet indfriet. Der er ingen gebyrer. Hvor stor er ÅOP?

Løsning

Vi indsætter værdierne for y, G og n i formel (7) og får:

$$1200 \;=\; 25000\cdot\frac{r}{1-(1+r)^{-24}}$$

Ligningen løses med et CAS-værktøj til $r=0{,}011644$. Denne månedlige rente indsættes herefter i formel (8) for at få den årlige rente:

$$r_{år} \;=\; (1+0{,}011644)^{12}-1 \;=\; 0{,}149 \;=\; 14{,}9\%$$

Altså en ÅOP på 14,9%, som er en ikke for høj rente.

□

Det er klart, at sætning 2 og 3 kun kan benyttes ret begrænset i den virkelige verden. Ofte vil der være forskellige stiftelsesgebyrer eller løbende administrationsomkostninger i spil. I nogle tilfælde kan man dog alligevel benytte sætning 3 ved at tælle stiftelsesomkostninger med i værdien for G eller administrationsomkostningerne med i ydelsen, hvis forudsætningerne er derfor. Ellers må man ty til Grundligningen (3) for at bestemme ÅOP. Til slut skal det lige nævnes, at det engelske sidestykke til begrebet ÅOP er ARP, som står for *Annual Percentage Rate*.

Opgaver

Opgave 1 (Pålydende rente og debitorrente)

Et lån har en månedlig rente på 1,4%.

a) Hvor stor er den pålydende rente p.a.?
b) Hvor stor er debitorrenten?

Opgave 2 (Realrente)

Den pålydende rente p.a. i en investeringsfond var et år på 12,7%. Inflationen var det samme år på 2,6%.

a) Bestem investeringens realrente.

En regel siger, at hvis den pålydende rente og inflationen er relativ små, så kan man benytte følgende approksimation til realrenten: $r_{real} \approx r_{pål} - i$.

b) Benyt formlen for den approksimerede værdi til realrenten. Hvor meget er den forskellig fra den rigtige værdi i dette tilfælde?

Opgave 3 (Månedlig rente til årlig rente vice versa)

For at afbetale et lån betales en månedlig rente på 1,09%.

a) Hvilken årlig rente i procent svarer det til?

Debitorrenten, dvs. den årlige rente regnet med renters rente, er for et lån 23%.

b) Bestem lånets tilsvarende månedlige rente.

Hjælp: Benyt formlerne (4) og (5).

Opgave 4 (Renter i forskellige perioder)

Et lån afbetales med en kvartalsrente på 4,8%. Hvilken årlig rente i procent svarer det til?

Hjælp: Benyt formlerne (4).

Opgave 5 (Renter i forskellige perioder)

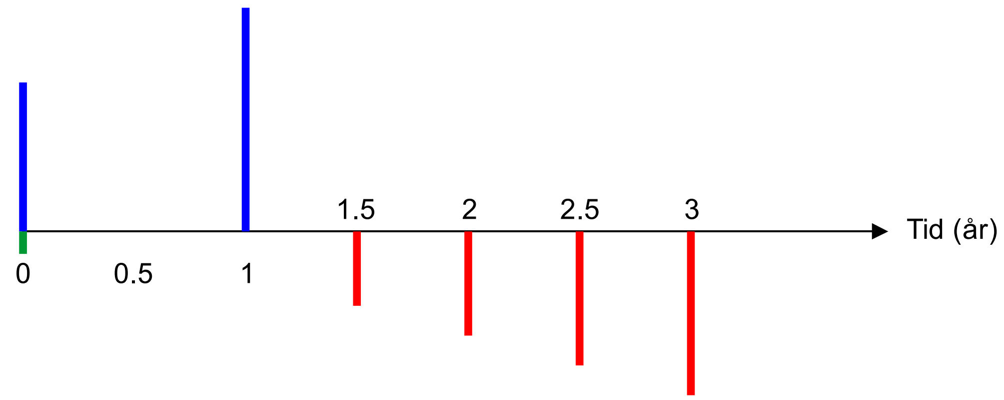
Et lån afbetales med en halvårlig rente på 12,1%. Hvilken årlig rente svarer det til?

Opgave 6 (Renter i forskellige perioder)

Hvor meget svarer en årlig rente på 31,0% til i kvartalsrente?

Opgave 7 (ÅOP)

En ny låneudbyder tilbyder følgende lidt aparte lånebetingelser: Låner modtager fra starten 10000 kr. og efter 1 år yderligere 15000 kr. I de efterfølgende fire halvår afbetales lånet med følgende ydelser: 5000 kr. efter 1,5 år, 7000 kr. efter 2 år, 9000 kr. efter 2,5 år og endelig 11000 kr. efter 3 år. Stiftelsesomkostningerne for lånet er 1500 kr. ved start.



Ovenstående figur illustrerer lånets forløb.

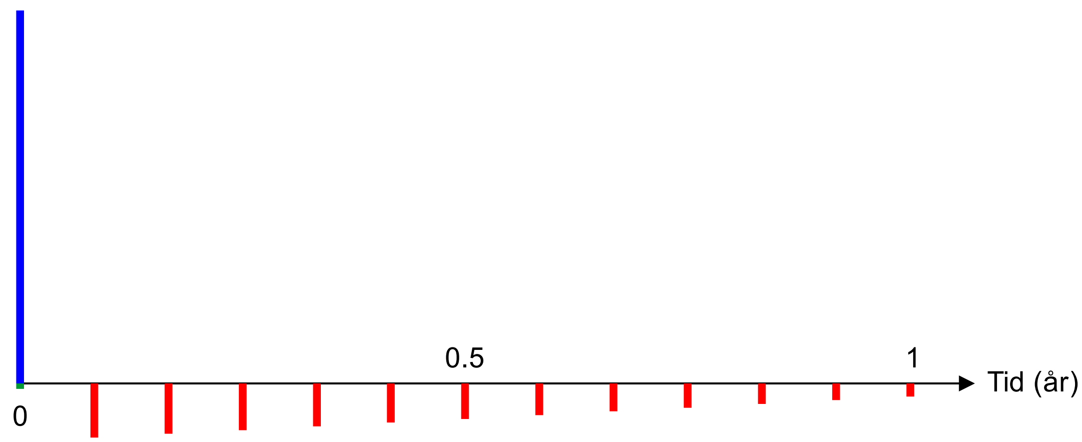
a) Vis at lånets ÅOP er på 19,1%. *Hjælp*: Se teknikken i eksempel 1.

b) Hvad stiger lånets ÅOP til, hvis de fire ydelser sættes op med hver 1000 kr. til henholdsvis 6000 kr., 8000 kr., 10000 kr. og 12000 kr.? Loven af 2019 siger, at man ikke må markedsføre lån med en ÅOP over 25%. Kan låneudbyderen markedsføre lånet med de nye betingelser?

Opgave 8 (ÅOP)

Kurt står i akut mangel på likviditet og går til en låneudbyder. Her bliver han tilbudt et lån på 20000 kr. til følgende vilkår: Han får straks 20000 kr. på lommen, på nær 300 kr., som han straks skal betale i stiftelsesomkostninger. Hver af de efterfølgende måneder skal han derefter betale en ydelse indtil året er gået. Ydelsen er efter 1. måned 2900 kr., efter 2. måned 2700 kr., efter 3. måned 2500 kr., etc. For hver måned går ydelsen ned med 200 kr. indtil sidste indbetaling på 700 kr. 12 måneder senere.

a) Benyt Grundligningen (3) til at bestemme lånets ÅOP.



Opgave 9 (Renteformlen)

a) Et lån på 37000 kr. optages og afbetales med én betaling på 51000 kr. 5 år senere. Hvor stor er ÅOP?

b) Samme spørgsmål, hvis løbeperioden kun er 2,5 år. NB! Bemærk, at formlen sagtens kan bruges, selv om der ikke er tale om et helt antal år.

Opgave 10 (Annuitetslån)

Astrid skal bruge 5000 kr. for at kunne købe et Sony TV. Hun tager et lån på afbetaling, hvor hun hver måned i 48 måneder skal betale 150 kr. Indbetalingen starter en måned efter lånet er optaget. Der er ingen gebyrer.

a) Hvor stor er ÅOP for det pågældende lån. Angiv svaret med 1 decimals nøjagtighed. *Hjælp*: Benyt sætning 3.

b) Hvor meget kommer Astrid til at betale sammenlagt for TV'et?

Opgave 11 (Annuitetslån)

I et stort firma, som sælger elektronikartikler, ønsker Anton at købe den dyreste mobiltelefon til 8500 kr. Han vælger at tage mod firmaets tilbud om en afbetalingsordning, hvor han hver af de efterfølgende 24 måneder skal betale 400 kr.

a) Hvad er lånets ÅOP?

Firmaet vælger at ændre betingelserne for lånet for nye kunder. Nu skal man udover ydelserne også betale et administrationsgebyr på 25 kr. hver gang der betales en ydelse.

b) Hvor meget stiger ÅOP til? *Hjælp*. Du kan stadig bruge formel 3. Hvordan?

Senere vælger firmaet endnu en gang at ændre lånebetingelserne. I stedet for et månedligt gebyr, skal man nu betale et halvårligt administrationsgebyr på 200 kr., startende et halvt år efter lånet optages og sluttende på det tidspunkt, hvor lånet er tilbagebetalt.

c) Hvad er ÅOP nu for lånet. *Hjælp*: Her kan sætning 3 ikke længere bruges. Du må ty til Grundligningen (3).

Opgave 12 (Kviklån)

Søg på Internettet efter *kviklån*. Undersøg betingelserne og bestem ÅOP for lånet. Holder lånet den nye lov fra 2019 om, at ÅOP højst må være på 35%, og hvis lånet markedføres endda højst må være på 25%?

Opgave 13 (Excel-funktioner)

Excel har en masse indbyggede finansfunktioner. En af dem er RENTE, med hvilken man kan bestemme renten i et annuitetslån. Funktionen er abstrakt set på følgende form:

```
RENTE(nper;ydelse;nv;[fv];[type];[gæt])
```

Her er betydningerne følgende. Bemærk, at det i firkantede parentes er frivilligt.

`nper`	Antal ydelsesperioder, dvs. antal terminer.
`ydelse`	Ydelsen hver termin.
`nv`	Den nuværende værdi, i praksis *minus* Hovedstolen.
`[fv]`	Restbeløbet efter lånets løbetid. Normalt vil det være 0, hvis lånet er betalt ud. Det er også defaultværdien for størrelsen.
`[type]`	Falder ydelsen ved periodens afslutning er værdien 0. Hvis ydelsen falder ved periodens begyndelse, er værdien 1. Default er 0.
`[gæt]`	Nogle gange kan det være nødvendigt med et gæt på rentesatsens størrelse. Det skyldes, at der skal løses en ligning. Men altså frivilligt.

NB! Husk et lighedstegn foran, når formlen skrives i et felt!

I tilfældet nedenfor har vi oplyst gældens størrelse (Hovedstolen), ydelsen pr. termin og antal terminer. Dermed kan terminsrenten beregnes i felt D2 nedenfor via formlen:

```
=RENTE(48;445;-15000)
```

Resultatet vises i feltet D2. Det kan eventuelt være nødvendigt at få vist flere cifre i feltet via redskabet *Forøg decimal* i værktøjslinjen. Det oplyses, at en periode eller en termin i det konkrete tilfælde er en måned. For at få den årlige rente, altså ÅOP, kan man i feltet E2 derfor skrive følgende formel (overvej?):

```
=(1+RENTE(48;445;-15000))^12-1
```

Alt i alt får vi følgende i Excel dokumentet:

Hovedstol	Ydelse	Antal terminer	Terminsrente	Årlig rente
15000	445	48	1,55%	20,22%

Prøv det selv af med de aktuelle værdier og eksperimentér selv videre med mulighederne.

Litteratur/Links

[1] https://www.matematikfysik.dk/mat/noter_tillaeg/tillaeg_annuitetsregning.pdf (Tillæg om annuitetsregning).

[2] https://www.retsinformation.dk/eli/lta/2015/1336#id9642bb75-ba4e-4518-9a24-afc938f824fd (Retsinformation om Grundligningen til beregning af ÅOP)

Opdateret 29.12.20